ACTA ECONOMICA (Online), год. 9, бр. 15 / јул 2011.
УДК 336.781/.785, e-ISSN 2232-738X

ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНАК

Миливој Крчмар[*]
Весна Пророк[**]

ЕВАЛУАЦИЈА ЗАЈМА – МОДЕЛИ ЈЕДНАКИХ ИСПОДГОДИШЊИХ ОТПЛАТА

EVALUATION OF LOAN – MODELS OF EQUAL PRINCIPALS RE-PAYMENTS WHICH ARE PAID *m* TIMES IN YEAR

Резиме

У овом раду презентована је евалуација зајма у току амортизације ако се зајам амортизује по моделу једнаких исподгодишњих отплата, а да се камата обрачунава и плаће на крају године у току n година. Овдје се разматрtekstају два случаја: а) полази се од претпоставке да се евалуација зајма врши по протеку k година од дана реализације зајма и б) полази се од претпоставке да се евалуација зајма врши по протеку k година и t исподгодишњих интервала од тренутка реализације зајма, гдје је $1 \leq t < m$, а m је број отплата у једној години. Евалуација зајма се врши на бази стопе евалуације, односно ефективне каматне стопе.

Кључне ријечи: евалуација зајма, дисконтована вриједност отплата, дисконтована вриједност камата, стопа евалуације (ефективна каматна стопа).

[*] Економски факултет Универзитета у Бањој Луци, milivoj.krcmar@efbl.org
[**] Економски факултет Универзитета у И. Сарајеву

Summary

This paper presents the account of loan evaluation, i.e. loan value assessment during amortization with equal principals repayments which are paid m times in year. Given the loan evaluation moment, there could emerge two cases: a) the loan evaluation is made at the moment of k-th payment of interest and b) the loan evaluation is made after of $k + t/m$ period. The loan evaluation is made based on the evaluation rate, i.e. effective interest rate.

Key words: evaluation of loan, discount value of principals repayment, discount value of interest, rate of evaluation (effective interest rate).

Увод

Разлог за евалуацију зајма у току амортизације може бити у томе да дужник жели, послије протека извјесног времена од дана почетка отплате зајма, да плати унапријед преостале ануитете или, пак да повјерилац жели до прода унапријед своје потраживање. Процијенити вриједност преосталих плаћања (отплата и камата) која служе за ликвидацију дуга у неком тренутку по стопи евалуације p_e, значи израчунати у том тренутку садашњу (дисконтовану) вриједност свих будућих плаћања дужника која се односе на дати зајам.

У овом раду се полази од претпоставке да се зајам амортизује с примарно датим отплатама које се плаћају у исподгодишњим интервалима, а да се камата обрачунава и плаћа у годишњим интервалима на бази номиналне каматне стопе p.

1. Евалуација зајма по протеку k година од тренутка реализације зајма

У овом случају полази се од претпоставке да се процјена вриједности зајма врши по протеку k година од почетка отплате зајма, под условом да је $0 < k < n$.

1.1. Декурзивне једнаке исподгодишње отплате

У овом моделу амортизације зајма полази се од претпоставке да се зајам амортизује у току n година по моделу једнаких исподгодишњих декурзивних отплата (мјесечно, тромјесечно,...), а да се камата обрачунава и плаће на крају сваке године по номиналној каматној стопи p.

Треба процијенити вриједност зајма након k година на бази стопе евалуације p_e.

Процијењена вриједност зајма, по протеку k година од тренутка реализације зајма, биће:

$$K_{e,k} = DVb_{e,k} + DVI_{e,k}$$

гдје је:

$K_{e,i}$ - процијењена вриједност зајма, у тренутку k, на бази стопе p_e;

$DVb_{e,k}$ - процијењена дисконтована вриједност неплаћених отплата, у тренутку k, на бази стопе p_e;

$DVI_{e,k}$ - процијењена дисконтована вриједност неплаћених камата, у тренутку k, на бази стопе p_e.

Како се у овом моделу ради о једнаким исподгодишњим отплатама, гдје се у оквиру једне године плаћа m отплата, то се процијењена дисконтована вриједност неплаћених отплата, у тренутку k, на бази стопе p_e, може написати:

$$DVb_{e,k} = b\left(v_e^{\frac{1}{m}} + v_e^{\frac{2}{m}} + v_e^{\frac{3}{m}} + \ldots + v_e^{\frac{m-1}{m}} + v_e + v_e^{1\frac{1}{m}} + v_e^{1\frac{2}{m}} + \ldots + v_e^{1\frac{m-1}{m}} + \right.$$
$$\left. + v_e^2 + \ldots + v_e^{n-k-\frac{1}{m}} + v_e^{n-k} \right)$$

То се, даље, може написати:

$$DVb_{e,k} = bS,$$

гдје је

$$S = v_e^{\frac{1}{m}} + v_e^{\frac{2}{m}} + v_e^{\frac{3}{m}} + \ldots + v_e^{\frac{m-1}{m}} + v_e + v_e^{1\frac{1}{m}} + v_e^{1\frac{2}{m}} + \ldots + v_e^{1\frac{m-1}{m}} + v_e^2 + \ldots + v_e^{n-k-\frac{1}{m}} + v_e^{n-k}$$

Када се ова једначина помножи са $v_e^{\frac{1}{m}}$ и од добијене одузмемо полазну једначину, добићемо:

$$S = \frac{v_e^{\frac{1}{m}}\left(1 - v_e^{n-k}\right)}{1 - v_e^{\frac{1}{m}}}$$

Коначно, можемо написати да је

$$DVb_{e,k} = b\frac{v_e^{\frac{1}{m}}\left(1 - v_e^{n-k}\right)}{1 - v_e^{\frac{1}{m}}} \qquad (1)$$

Да бисмо израчунали дисконтовану процијењену вриједност неплаћених камата, неопходно је претходно израчунати износе камате које треба платити на крају сваке године за преосталих $n-k$ година на бази релативне каматне стопе $\frac{i}{m}$. То ће, у овом моделу бити:

Камата коју треба платити на крају $k+1.$ године, биће:

$$I_{k+1} = \left\{\left(mn - mk\right)b + \left(mn - mk - 1\right)b + \left(mn - mk - 2\right)b + \ldots + \left[mn - mk - \left(m-1\right)\right]b\right\}\frac{i}{m}$$

Послије неопходног математског сређивања овог израза, добија се:

$$I_{k+1} = bi\left[m\left(n-k\right) - \frac{m-1}{2}\right]$$

Камата коју треба платити на крају $k+2.$ године, биће:

$$I_{k+2} = \left\{\left(mn - mk - m\right)b + \left(mn - mk - m - 1\right)b + \left(mn - mk - m - 2\right)b + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \left[mn - mk - \left(2m-1\right)\right]b\right\}\frac{i}{m}$$

Послије сређивања овог израза, добије се:

$$I_{k+2} = bi\left[m\left(n-k\right) - m - \frac{m-1}{2}\right]$$

Камата коју треба платити не крају $k+3$. година, биће:

$$I_{k+3}=\{(mn-mk-2m)b+(mn-mk-2m-1)b+(mn-mk-2m-2)b+\ldots$$
$$\ldots+[mn-mk-(3m-1)]b\}\frac{i}{m}$$

Након неопходног сређивања овог израза, добија се:

$$I_{k+3}=bi\left[m(n-k)-2m-\frac{m-1}{2}\right]$$

Аналогно томе, биће:

Камата која се плаћа на крају $n-1$-ве године:

$$I_{n-1}=bi\left[m(n-k)-m(n-k-2)-\frac{m-1}{2}\right]$$

Камата која се плаћа на крају n - те године, биће:

$$I_{n}=bi\left[m(n-k)-m(n-k-1)-\frac{m-1}{2}\right]$$

Процијењена дисконтована вриједност неплаћених камата, у тренутку k, на бази стопе p_e, биће:

$$DVI_{e,k}=bi\left\{\left[m(n-k)-\frac{m-1}{2}\right]v_e+\left[m(n-k)-m-\frac{m-1}{2}\right]v_e^2+\right.$$
$$+\left[m(n-k)-2m-\frac{m-1}{2}\right]v_e^3+\ldots+\left[m(n-k)-m(n-k-2)-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{n-k-1}+$$
$$\left.+\left[m(n-k)-m(n-k-1)-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{n-k}\right\}$$

То ће, даље, бити:

$$DVI_{e,k}=bi\left\{\left[m(n-k)-\frac{m-1}{2}\right]\left(v_e+v_e^2+v_e^3+\ldots+v_e^{n-k-1}+v_e^{n-k}\right)-\right.$$
$$\left.-m\left[v_e^2+2v_e^3+\ldots+(n-k-2)v_e^{n-k-1}+(n-k-1)v_e^{n-k}\right]\right\}=$$
$$=bi\left\{\left[m(n-k)-\frac{m-1}{2}\right]\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e}-mS\right\},$$

гдје је $S = v_e^2 + 2v_e^3 + \ldots + (n-k-2)v_e^{n-k-1} + (n-k-1)v_e^{n-k}$

Када се ова једначина помножи са v_e и од полазне одузмемо добијену једначину, добија се:

$$S = \frac{1}{i_e}\left[\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - (n-k)v_e^{n-k}\right]$$

Коначно, можемо написати да ће процијењена дисконтована вриједност неплаћених камата по протеку k година од почетка амортизације зајма на бази стопе p_e, бити:

$$DVI_{e,k} = bi\left\{\left[m(n-k) - \frac{m-1}{2}\right]\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - \frac{m}{i_e}\left[\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - (n-k)v_e^{n-k}\right]\right\} \quad (2)$$

1.2. Антиципативне исподгодишње једнаке отплате

У овом моделу амортизације зајма полази се од претпоставке да се зајам амортизује у току n година, по моделу једнаких исподгодишњих антиципативних отплата уз номиналну каматну стопу p, с тим да се камата обрачунава и плаћа годишње (декурзивно) на бази релативне каматне стопе $\frac{i}{m}$.

Процијењена дисконтована вриједност неплаћених отплата, по протеку k година од дана почетка амортизације зајма, на бази стопе p_e, биће:

Након неопходног математског сређивања овог израза, добија се:

$$DVb_{e,k} = b\frac{v_e^{n-k} - 1}{v_e^{\frac{1}{m}} - 1} \quad (3)$$

Износ камата које треба платити у преосталих $n-k$ година, биће:
Камата на крају $k+1$. године:

$$I_{k+1} = \left[(mn-mk-1)b + (mn-mk-2)b + (mn-mk-3)b + \ldots + (mn-mk-m)b\right]\frac{i}{m}$$

Послије сређивања овог израза, добија се:

$$I_{k+1} = bi\left[m(n-k) - \frac{m+1}{2}\right]$$

Камата на крају $k+2.$ године, биће:

$$I_{k+2} = \left[(mn-mk-m-1)b + (mn-mk-m-2)b + (mn-mk-m-3)b + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (mn-mk-2m)b\right]\frac{i}{m}$$

Послије сређивања овог израза, добија се:

$$I_{k+2} = bi\left[m(n-k) - m - \frac{m+1}{2}\right]$$

Аналогно томе, биће:

$$I_{k+3} = bi\left[m(n-k) - 2m - \frac{m+1}{2}\right]$$

$$I_{n-1} = bi\left[m(n-k) - m(n-k-2) - \frac{m+1}{2}\right]$$

$$I_{n} = bi\left[m(n-k) - m(n-k-1) - \frac{m+1}{2}\right]$$

Процијењена дисконтована вриједност неплаћених камата по протеку k година од дана почетка амортизације зајма, на бази стопе p_e, биће:

$$DVI_{e,k} = bi\left[m(n-k) - \frac{m+1}{2}\right]v_e + bi\left[m(n-k) - m - \frac{m+1}{2}\right]v_e^2 + \ldots$$
$$\ldots + bi\left[m(n-k) - 2m - \frac{m+1}{2}\right]v_e^3 + bi\left[m(n-k) - m(n-k-2) - \right.$$
$$\left. - \frac{m+2}{2}\right]v_e^{n-k-1} + bi\left[m(n-k) - m(n-k-1) - \frac{m+1}{2}\right]v_e^{n-k}$$

То се, даље, може написати:

$$DVI_{e,k} = bi\left\{\left[m(n-k) - \frac{m+1}{2}\right]\left(v_e + v_e^2 + v_e^3 + \ldots + v_e^{n-k-1} + v_e^{n-k}\right) - \right.$$

$$\left. - m\left[v_e^2 + 2v_e^3 + \ldots + (n-k-2)v_e^{n-k-1} + (n-k-1)v_e^{n-k}\right]\right.$$

$$= bi\left\{\left[m(n-k) - \frac{m+1}{2}\right]\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - mS\right\},$$

гдје је $S = v_e^2 + 2v_e^3 + \ldots + (n-k-2)v_e^{n-k-1} + (n-k-1)v_e^{n-k}$

Послије сређивања овог израза, добија се:

$$DVI_{e,k} = bi\left\{\left[m(n-k) - \frac{m+1}{2}\right]\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - \frac{m}{i_e}\left[\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e} - (n-k)v_e^{n-k}\right]\right\} \quad (4)$$

2. Евалуација зајма по протеку k година и t подпериода од тренутка реализације зајма

У овом случају полази се од претпоставке да се евалуација зајма врши по протеку k година и t ispodgodišnjih рериода од почетка амортзације зајма, гдје је $1 \le t < m$.

2.1. Декурзивне једнаке исподгодишње отплате

Дисконтована процијењена вриједност неплаћених отплата, у тренутку $k+t$, на бази споте p_e, биће:

$$DVb_{e,k+t} = b\left(v_e^{\frac{1}{m}} + v_e^{\frac{2}{m}} + v_e^{\frac{3}{m}} + \ldots + v_e^{n-k-\frac{t}{m}-\frac{1}{m}} + v_e^{n-k-\frac{t}{m}}\right)$$

То се, даље, може написати:

$$DVb_{e,k+t} = bS$$

гдје је $S = v_e^{\frac{1}{m}} + v_e^{\frac{2}{m}} + v_e^{\frac{3}{m}} + \ldots + v_e^{n-k-\frac{t}{m}-\frac{1}{m}} + v_e^{n-k-\frac{t}{m}}$

Када се ова једначина помножи са $v_e^{\frac{1}{m}}$ и од добијене одузме полазна једначина, добија се:

$$S=\frac{v_e^{\frac{1}{m}}\left(1-v_e^{n-k-\frac{t}{m}}\right)}{1-v_e^{\frac{1}{m}}}$$

Коначно, процијењена дисконтована вриједност неплаћених отплата, у тренутку $k+t$ периода, биће:

$$DVb_{e,k+t}=b\frac{v_e^{\frac{1}{m}}\left(1-v_e^{n-k-\frac{t}{m}}\right)}{1-v_e^{\frac{1}{m}}} \qquad (5)$$

Износ неплаћених камата је исти као и у случају да се процјена ради по протеку k година од почетка амортизације зајма. Међутим, њихова процијењена дисконтована вриједност у тренутку $k+t$, ће бити:

$$\begin{aligned}DVI_{e,k+t}=bi\Bigg\{&\left[m(n-k)-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{1-\frac{t}{m}}+\left[m(n-k)-m-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{2-\frac{t}{m}}+\\&+\left[m(n-k)-2m-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{3-\frac{t}{m}}+\ldots+\left[m(n-k)-m(n-k-2)-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{n-k-1-\frac{t}{m}}+\\&+\left[m(n-k)-m(n-k-1)-\frac{m-1}{2}\right]v_e^{n-k-\frac{t}{m}}\Bigg\}\end{aligned}$$

Након неопходних математских трансформација овог израза, добија се:

$$DVI_{e,k+t}=\frac{bi}{i_e v_e^{\frac{t}{m}}}\left\{\left[m(n-k)-\frac{m-1}{2}\right]\left(1-v_e^{n-k}\right)-m\left[\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e}-(n-k)v_e^{n-k}\right]\right\} \qquad (6)$$

2.2. Антиципативне једнаке исподгодишње отплате

Процијењена дисконтована вриједност неплаћених отплата у тренутку $k+t$, на бази стопе p_e, биће:

$$DVb_{e,k+t}=b+bv_e^{\frac{1}{m}}+bv_e^{\frac{2}{m}}+\ldots+bv_e^{n-k-\frac{2}{m}-\frac{t}{m}}+bv_e^{n-k-\frac{1}{m}-\frac{t}{m}}$$

Након неопходних математских трансформација овог израза, добија се:

$$DVb_{e,k+t}=b\frac{v_e^{n-k-\frac{t}{m}}-1}{v_e^{\frac{1}{m}}-1}\quad(7)$$

Дисконтована процијењена вриједност неплаћених камата у тренутку $k+t$, на бази стопе p_e, биће:

$$DVI_{e,k+t}=bi\left\{\left[m(n-k)-\frac{m+1}{2}\right]v_e^{1-\frac{t}{m}}+\left[m(n-k)-m-\frac{m+1}{2}\right]v_e^{2-\frac{t}{m}}+\right.$$
$$+\left[m(n-k)-2m-\frac{m+1}{2}\right]v_e^{3-\frac{t}{m}}+\ldots+\left[m(n-k)-m(n-k-2)-\frac{m+1}{2}\right]v_e^{n-k-1-\frac{t}{m}}+$$
$$\left.+\left[m(n-k)-m(n-k-1)-\frac{m+1}{2}\right]v_e^{n-k-\frac{t}{m}}\right\}$$

То ће, даље, бити:

$$DVI_{e,k+t}=bi\left\{\left[m(n-k)-\frac{m+1}{2}\right]\frac{v_e+v_e^2+v_e^3+\ldots+v_e^{n-k-1}+v_e^{n-k}}{v_e^{\frac{t}{m}}}-\right.$$
$$\left.-m\frac{v_e^2+2v_e^3+\ldots+(n-k-2)v_e^{n-k-1}+(n-k-1)v_e^{n-k}}{v_e^{\frac{t}{m}}}\right.$$

Након неопходних математских трансформација овог израза, добија се:

$$DVI_{e,k+t}=\frac{bi}{i_e v_e^{\frac{t}{m}}}\left\{\left[m(n-k)-\frac{m+1}{2}\right]\left(1-v_e^{n-k}\right)-m\left[\frac{1-v_e^{n-k}}{i_e}-(n-k)v_e^{n-k}\right]\right\}\quad(8)$$

Закључак

Циљ овог рада је да се презентују нови модели евалуације зајма у току амортизације, који могу имати примјену било у тренутку купопродаје зајма, било у тренутку процјене вриједности предузећа. У раду су обрађени модели исподгодишњих једнаких отплата, с тим да се камата обрачунава и плаћа у годишњим интервалима. Анализирана су два случаја: а)случај када се евалуација ради по протеку k година од тренутка почетка амортизације зајма и б) случај када се процјена зајма ради по протеку k година и t исподгодишњих периода од тренутка амортизације зајма.

Литература

1. Крчмар, М. *Финансијска математика и методе инвестиционог одлучивања.* Сарајево: Кемиграфика, 2007.
2. D'ecclesia, R.L; Gardini, L. *Appunti di Matematica Finanziaria* Torino: G.Giappichelli, 2001.